COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 10 GIUGNO 2008

PROF. SUSANNA TERRACINI

1) Sia $E \subset \mathbf{R}^d$ un rettangolo d-dimensionale. Dimostrare che, per ogni $A, B \subset E$ si ha
$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \,\Delta\, B).$$

2) Scrivere la definizione di funzione misurabile. Dimostrare che se f e g sono funzioni misurabili allora l'insieme
$$\{x \,:\, f(x) < g(x)\}$$
è misurabile.

3) Scrivere la definizione di funzione integrabile secondo Lebesgue. Sia $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,;$$
stabilire se è una funzione integrabile secondo Lebesgue.

4) (a) Studiare la convergenza quasi ovunque, uniforme e sotto segno di integrale (in $L^1(\mathbf{R})$) della successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da
$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\arctan(nx)}{nx}\right)^2, & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0\,. \end{cases}$$

(b) Studiare la convergenza quasi ovunque e stabilire l'integrabilità o meno della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} f_n(x)\,.$$

5) Sia $\mathbf{F}$ il campo definito da:
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{N} Q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\|^3}$$
(si osservi che è il campo elettrico generato da N cariche puntiformi di posizioni $\mathbf{y}_i$ e cariche $Q_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, N$). Utilizzare il Teorema della divergenza per dimostrare che *il flusso uscente da una superficie* Σ *è uguale a* $4\varepsilon\pi Q$, *dove* Q *è la carica totale contenuta entro* Σ (è la legge di Gauss).

SOLUZIONI

1) Poiché

$$A \subseteq B \cup A\Delta B \quad \& \quad B \subseteq A \cup A\Delta B$$

e la misura esterna è subadditiva (e monotona rispetto all'inclusione) si ha

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B \cup A\Delta B) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B)$$

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup A\Delta B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B).$$

Ne segue che

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A\Delta B)$$

e

$$\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A\Delta B) \quad \Longrightarrow$$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B)$$

2) Sia (X, μ) uno spazio di misura. Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ si dice misurabile se le controimmagine dei boreliani sono misurabili.

Poiché la controimmagine di un σ-anello (o di una σ-algebra) è un σ-anello (rispettivamente una σ-algebra), si dimostra che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- f è misurabile
- le controimmagini di aperti (o chiusi) sono misurabili
- le controimmagini di semirette $(a, +\infty)$ (o $(-\infty, a)$) sono misurabili

Presa una enumerazione dei razionali $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, abbiamo l'uguaglianza

$$\underbrace{\{x : f(x) < g(x)\}}_{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x : f(x) < r_n\} \cap \{x : g(x) > r_n\}$$

Infatti, se $f(x) < g(x)$ allora esiste almeno un razionale $r_{\bar{n}}$ tale che $f(x) < r_{\bar{n}} < g(x)$, e dunque x è elemento dell'insieme a secondo membro.
Viceversa, se per un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ si ha $f(x) < r_{\bar{n}}$ e $g(x) > r_{\bar{n}}$ si avrà $f(x) < g(x)$.

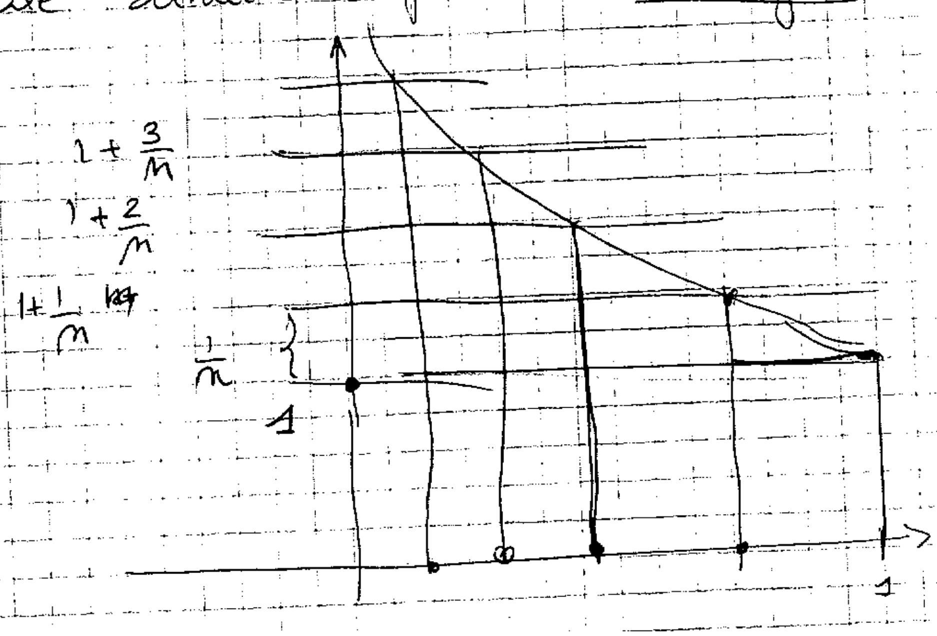
* Dunque l'insieme A è un'unione numerabile di insiemi misurabili: è misurabile.

3) Una funzione f si dice integrabile secondo Lebesgue se esiste una successione di funzioni semplici f_n integrabili che converge uniformemente ad f.

<u>Osservazione</u>: se una tale successione esiste, si dimostra che esiste anche il limite della successione degli integrali

$$\int_X f_n(x)\, d\mu .$$

Tale limite definisce <u>l'integrale</u> di f.



Definiamo, per $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq n$,

$$f_n(x) = \frac{m}{n} \quad \text{se} \quad f(x) \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$$

cioè

$$f_n(x) = \frac{m}{n} \quad \text{se} \quad x \in \left(\left(\frac{n}{m+1}\right)^2, \left(\frac{n}{m}\right)^2\right].$$

Le f_n sono funzioni semplici, infatti la loro immagine è un insieme numerabile.

Verifichiamo che f_n converge ad f uniformemente su $(0,1)$: per costruzione si ha

$$f_n(x) \leq f(x) < f_n(x) + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n} \qquad \forall x \in (0,1)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ \forall x \in (0,1) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\left(\bar{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$.

Verifichiamo che le f_n sono integrabili: si tratta di funzioni positive e costanti sugli insiemi

$$A_m = \left(\left(\frac{n}{m+1}\right)^2, \left(\frac{n}{m}\right)^2\right] \qquad \mu(A_m) = n^2\left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right]$$

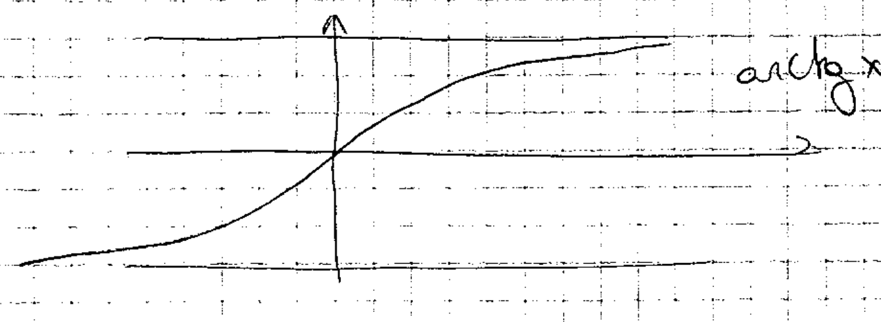
$$\int_{(0,1)} f_n(x)\, d\mu = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{n} \cdot \mu(A_m) =$$

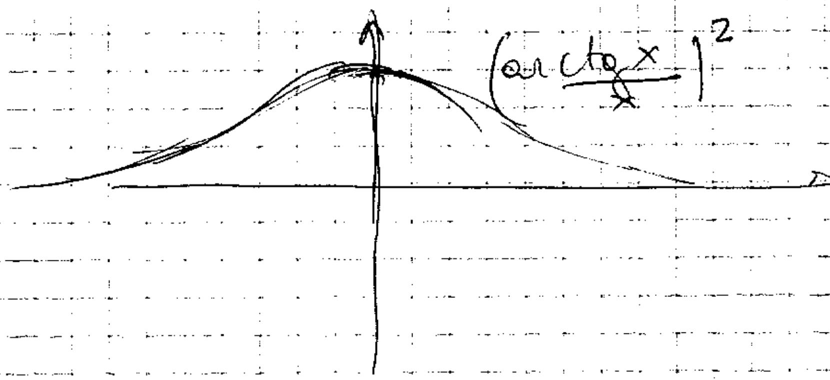
$$= n \sum_{m=1}^{+\infty} m \cdot \left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] = n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2m^2 + m}{m^2(m+1)^2} \sim \frac{2}{m^2}$$

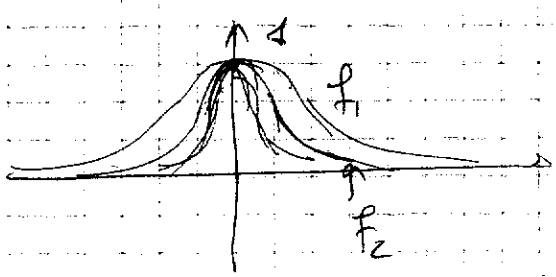
è una serie convergente (criterio del confronto con $\frac{2}{m^2}$).

4

4







~~La successione $f_n(x)$ converge~~

(a) Notiamo che $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} = f(x)$$

$f_n(x) \leq f_1(x)$. La successione converge a 0 quasi ovunque. Non vi converge uniformemente (poiché il limite puntuale non è continuo). Si può applicare il teorema della convergenza dominata, oppure osservare che

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Si ha quindi che

$$\lim \int f_n(x)\,dx = 0 = \int f(x)\,dx$$

b) Abbiamo $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n^2}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 dx$ (5)

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è sommabile, possiamo applicare il teorema di Beppo Levi per dedurre che la serie converge quasi ovunque ad un limite finito ed inoltre

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2}\operatorname{arctg}^2(nx)\right)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{nx}\right)^2 dx\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 dx$$

(5) Osserviamo che $\operatorname{div}\vec{F} = 0$. Infatti

$$\operatorname{div}\vec{F} = \varepsilon\sum_{i=1}^{N} Q_i \operatorname{div}\left(\frac{x-y_i}{\|x-y_i\|^3}\right)$$

Calcoliamo $\operatorname{div}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{x_1-y_1}{\|x-y\|^3} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{x_2-y_2}{\|x-y\|^3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{x_3-y_3}{\|x-y\|^3}$, ricordando che

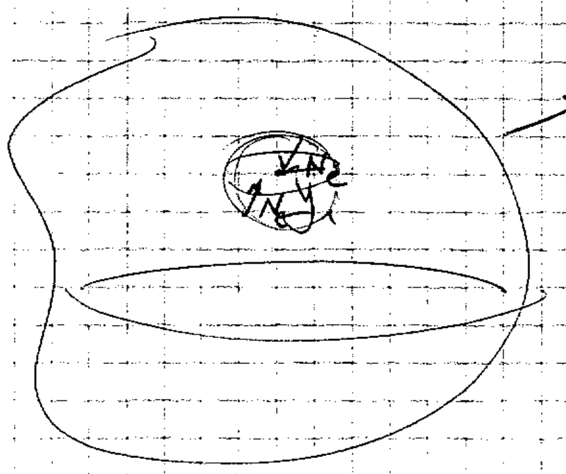
$$\|x-y\|^3 = \left((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2\right)^{3/2}:$$

abbiamo $\frac{\partial}{\partial x_i}\|x-y\|^3 = 3\,\|x-y\|\,(x_i-y_i)$

Perciò $\operatorname{div}\left(\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\right) = \frac{1}{\|x-y\|^6}\Big[\|x-y\|^3 - 3(x_1-y_1)^2\|x-y\|$ $\underbrace{}_{\frac{\partial}{\partial x_1}\|x-y\|^3}$

$+ \|x-y\|^3 - 3(x_2-y_2)^2\|x-y\| + \|x-y\|^3 - 3(x_3-y_3)^2\|x-y\|\Big]$

$= 0.$



Prendiamo una sferetta di centro y_i e raggio $r_i > 0$ che sia contenuta in V.

$\Sigma = \partial V$

Abbiamo

$$\int_{\Sigma} \frac{x-y_i}{\|x-y_i\|^3} \cdot N_e \, d\sigma + \int_{\partial B(y_i, r_i)} \frac{x-y_i}{\|x-y_i\|^3} \cdot N_e \, d\sigma$$

$$= \int_{V \setminus B(y_i, r_i)} \operatorname{div} \vec{F} \, dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Dunque

$$\int_{\Sigma} \frac{x-y_i}{\|x-y_i\|^3} \cdot N_e \, d\sigma = -\int_{\partial B_r(y_i, r_i)} \frac{x-y_i}{\|x-y_i\|^3} \cdot \left(-\frac{x-y_i}{\|x-y_i\|}\right) d\sigma$$

$$= \frac{1}{r_i^2} \boxed{\int_{\partial B(y_i, r_i)} d\sigma}$$ ← area della superficie sferica di raggio r_i

$$= \frac{4\pi r_i^2}{r_i^2} = 4\pi$$

Dunque $$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{N}_e \, d\sigma = \int_{\Sigma} \left(\varepsilon \sum_{i=1}^{N} Q_i \frac{x-y_i}{\|x-y_i\|^3} \cdot \vec{N}_e \right) d\sigma$$

$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} Q_i \, 4\pi = 4\pi\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N} Q_i \right)$$